Egzamin z Rachunku prawdopodobieństwa II – 19.02.2024

Spośród poniższych zadań proszę wybrać 5. Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 10 punktów. W przypadku oddania 6 zadań, do oceny będzie się liczyć 5 ocenionych najniżej. Odpowiedzi proszę udzielać w postaci zwartych wzorów. Mogą być wyrażone w terminach dystrybuanty standardowej zmiennej gaussowskiej. Należy precyzyjnie uzasadniać rozwiązania, powołując się na odpowiednie fakty z wykładu lub ćwiczeń.

A1 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi i.i.d. o gęstości $g(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Wyznaczyć wszystkie liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, takie że ciąg

$$Y_n = n^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$$

jest zbieżny według rozkładu. Dla każdej z tych liczb wyznaczyć rozkład graniczny.

A2 Czy funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadana wzorem

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} & \text{dla } t \neq 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

jest funkcją charakterystyczną? Odpowiedź uzasadnić.

Wskazówka: Twierdzenie Lévy'ego–Craméra oraz równość $(1 - a^2) = 2(1 - a)\frac{1+a}{2}$.

A3 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/i$ oraz $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - 1/i$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Oznaczmy

$$Z_n = \sqrt{\ln n}\sin\Big(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\ln n}\Big).$$

Dla $t \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność ciągu $\mathbb{E}\cos(tZ_n)$. Jeśli jest zbieżny – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

A4 Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dla $n \geqslant 1$. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 0\colon S_n \in \{-10, 5\}\}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$.

A5 W urnie są trzy kule. Na początku są to dwie kule białe i jedna czerwona. Następnie przeprowadzamy wielokrotnie następujący eksperyment. Niech b oznacza liczbę kul białych w urnie w danej chwili. Losujemy kulę z urny (z równymi prawdopodobieństwami) i z prawdopodobieństwem $b/4$ zastępujemy ją kulą białą, a z prawdopodobieństwem $(1 - b/4)$ – kulą czerwoną. Serię eksperymentów kończymy, gdy wszystkie kule w urnie będą tego samego koloru.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po zakończeniu ostatniego eksperymentu wszystkie kule będą czerwone.

b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby powtórzeń eksperymentu.

A6 Miasta A, B, C, D są połączone drogami (dwukierunkowymi): A–B, B–C, C–D, D–A, B–D. Pomiędzy tymi miastami podróżuje komiwojażer. Każdego dnia opuszcza miasto, w którym się znajduje, wybierając losową wychodzącą z niego drogę i udaje się do miasta na jej przeciwległym końcu. Dzisiaj komiwojażer przyjechał do miasta A. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że 19 lutego 2026 roku będzie przemieszczał się drogą pomiędzy miastami B i D.